Estimación del Ancho de Banda Efectivo a partir del radio espectral

Carina Fernández, José Bavio, Beatriz Marrón

Dpto. Matemática Universidad Nacional del Sur - jmbavio@yahoo.com.ar

Bahía Blanca - Junio 2023

Problema:

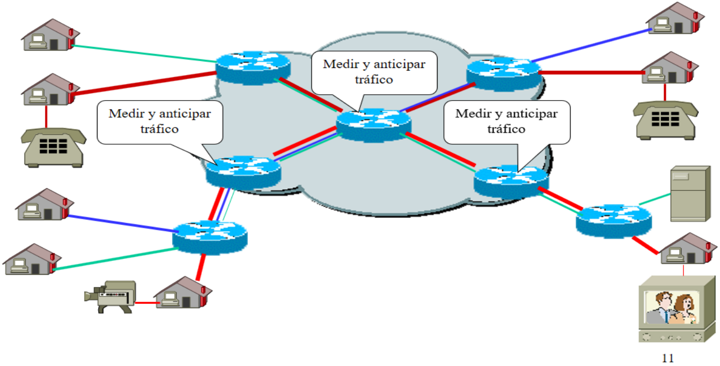


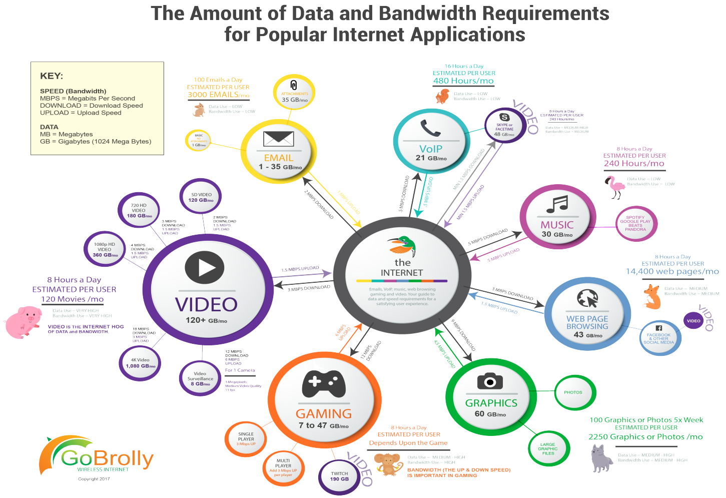
Figura: Esquema de red de datos

- Cómo medimos el requerimiento para una fuente de tráfico, y como lo anticipamos?
- Medirlo: Ancho de Banda Efectivo (ABE)
- Anticiparnos: hipótesis de modelado. Asumimos: Flujo Markoviano Generalizado (FMG).

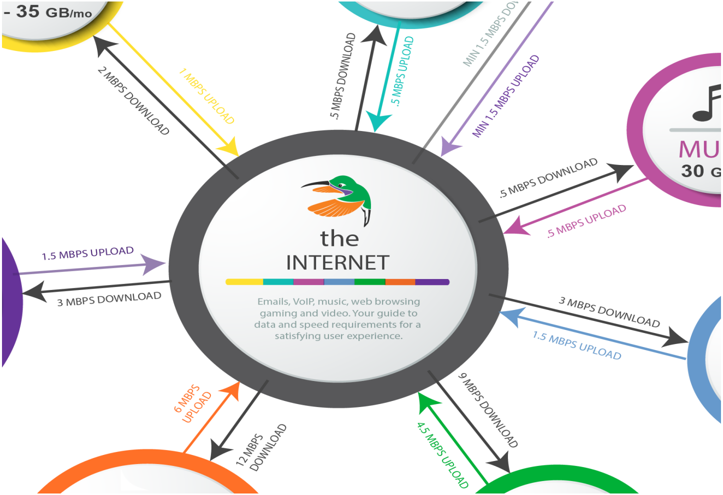
- Cómo medimos el requerimiento para una fuente de tráfico, y como lo anticipamos?
- Medirlo: Ancho de Banda Efectivo (ABE)
- Anticiparnos: hipótesis de modelado. Asumimos: Flujo Markoviano Generalizado (FMG).

- Cómo medimos el requerimiento para una fuente de tráfico, y como lo anticipamos?
- Medirlo: Ancho de Banda Efectivo (ABE)
- Anticiparnos: hipótesis de modelado. Asumimos: Flujo Markoviano Generalizado (FMG).

Tipos de Actividades online



Tipos de Actividades online



Parámetros del Flujo Markoviano Generalizado

- Q:
  - generador infinitesimal de la cadena, matriz de tamaño $k \times k$, Irreducible.
  - $q_{ij} \in \mathbb{R}$, $q_{ij} > 0$ fuera de la diagonal, $\sum_j q_{ij} = 0$, $q_{ii} < 0$.
  - q_{ij} es la cantidad de transiciones del estado i al j por unidad de tiempo
- H:
  - matriz diagonal con coeficientes en $\mathbb{R}^+$, tamaño $k \times k$
  - $H =$diag(h_i), donde h_i se corresponde con la velocidad media de despacho según la distribución asociada al estado i .
- π: la distribución invariante de la cadena. Es un vector de probabilidad fila de tamaño $k \times 1$, sus componentes suman 1.

Parámetros del Flujo Markoviano Generalizado

- Q:
  - generador infinitesimal de la cadena, matriz de tamaño $k \times k$, Irreducible.
  - $q_{ij} \in \mathbb{R}$, $q_{ij} > 0$ fuera de la diagonal, $\sum_j q_{ij} = 0$, $q_{ii} < 0$.
  - q_{ij} es la cantidad de transiciones del estado i al j por unidad de tiempo
- H:
  - matriz diagonal con coeficientes en $\mathbb{R}^+$, tamaño $k \times k$
  - $H =$diag(h_i), donde h_i se corresponde con la velocidad media de despacho según la distribución asociada al estado i .
- π: la distribución invariante de la cadena. Es un vector de probabilidad fila de tamaño $k \times 1$, sus componentes suman 1.

Parámetros del Flujo Markoviano Generalizado

- Q:
  - generador infinitesimal de la cadena, matriz de tamaño $k \times k$, Irreducible.
  - $q_{ij} \in \mathbb{R}$, $q_{ij} > 0$ fuera de la diagonal, $\sum_j q_{ij} = 0$, $q_{ii} < 0$.
  - q_{ij} es la cantidad de transiciones del estado i al j por unidad de tiempo
- H:
  - matriz diagonal con coeficientes en $\mathbb{R}^+$, tamaño $k \times k$
  - $H =$diag(h_i), donde h_i se corresponde con la velocidad media de despacho según la distribución asociada al estado i .
- π: la distribución invariante de la cadena. Es un vector de probabilidad fila de tamaño $k \times 1$, sus componentes suman 1.

Definición

La siguiente fórmula explícita del ABE para el FMG :

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st} \log\left\{\pi \exp\left[(Q + sH)\, t\right] \mathbf{1}\right\},$$

donde $\mathbf{1}$ *es un vector columna con todas las entradas iguales a 1.*

- Vamos a mirar el límite del ABE para $t \to \infty$ porque ahí tenemos un comportamiento global "estabilizado"

Definición

La siguiente fórmula explícita del ABE para el FMG :

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st} \log \left\{ \pi \exp \left[(Q + sH)\, t \right] \mathbf{1} \right\},$$

donde **1** *es un vector columna con todas las entradas iguales a 1.*

- Vamos a mirar el límite del ABE para $t \to \infty$ porque ahí tenemos un comportamiento global "estabilizado"

Resultado principal

Teorema

Dado un FMG modulado por una cadena de Markov a tiempo continuo homogénea e irreducible, con k estados, distribución inicial π y generador infinitesimal Q, se verifica:

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(s,t) = \frac{1}{s}\rho(Q+sH),$$

donde $\rho(Q+sH)$ es el máximo autovalor real de la matriz $Q+sH$.

Lema principal

Lema

Dado un FMG modulado por una cadena de Markov a tiempo continuo homogénea e irreducible, con k estados, distribución inicial π y generador infinitesimal Q, se verifica:

$$\lim_{t\to\infty} \{\pi \exp[(Q+sH)t]\mathbf{1}\}^{1/t} = \rho(\exp(Q+sH)),$$

donde $\rho(\exp(Q+sH))$ es el máximo autovalor real de la matriz $\exp(Q+sH)$.

Demostración

- Doble desigualdad, primero veremos que

$$\rho(\exp(Q+sH)) \geq \lim_{t\to\infty} \{\pi \exp[(Q+sH)t]\mathbf{1}\}^{1/t}.$$

  - $A := \exp(Q+sH)$, no negativa e irreducible y $P = \phi_d \phi_i'$ matriz de proyección espectral con respecto a A. $g_p := \rho(A)$
  - Armamos $B := A - g_p P$, que comparte autovalores con A. luego$|g_B| \leq g_p$
  - Fórmula de Gelfand:

$$\rho(B) = \lim_{m\to\infty} \|B^m\|^{1/m} = \lim_{m\to\infty} \left(\max_{1\leq j\leq k} \sum_{i=1}^{k} \left| b_{ij}^{(m)} \right| \right)^{1/m} \leq g_p,$$

  - Controlar las b_{ij}^m de B^m

$$\max_{i,j} \left| b_{ij}^{(m)} \right| \leq g_p^m, \forall\ m \geq k_2.$$

- B cumple que: $B^m = A^m - g_p^m P$. Luego,
- Además $g_p^t \pi P\mathbf{1} \leq g_p^t \phi_i' \mathbf{1}$.
- Para t suficientemente grande:

$$\pi B^t \mathbf{1} \leq g_p^t k.$$

- Luego por las propiedades de la matriz de proyección espectral:

$$\pi A^t \mathbf{1} = \pi B^t \mathbf{1} + g_p^t \pi P \mathbf{1} \leq \pi B^t \mathbf{1} + g_p^t \phi_i' \mathbf{1} \leq g_p^t [k + \phi_i' \mathbf{1}]$$

- Aplicando límite y elevando a la $1/t$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \left\{\pi A^t \mathbf{1}\right\}^{1/t} &\leq \lim_{t\to\infty} \left\{g_p^t [k + \phi_i' \mathbf{1})]\right\}^{1/t} \\ &= \lim_{t\to\infty} g_p [k + \phi_i' \mathbf{1})]^{1/t} = g_p. \end{aligned}$$

- Resta demostrar la otra desigualdad:

$$\rho(\exp(Q+sH)) \leq \lim_{t\to\infty} \{\pi \exp[(Q+sH)t]\mathbf{1}\}^{1/t}.$$

- El autovalor de Perron en matrices positivas verifica que

$$g_p \leq max_i \sum_j a_{ij},$$

$$A\mathbf{1} \geq g_p\mathbf{1}.$$

- Inducción sobre m vale: $A^m\mathbf{1} \geq g_p^m\mathbf{1}$.

$$\pi A^t\mathbf{1} \geq \pi g_p^t\mathbf{1} = g_p^t,$$

$$\lim_{t\to\infty} \{\pi A^t\mathbf{1}\}^{1/t} \geq \lim_{t\to\infty} [g_p^t]^{1/t} = g_p = \rho(\exp(Q+sH)). \qquad (1)$$

Con esto queda el Lema queda demostrado.

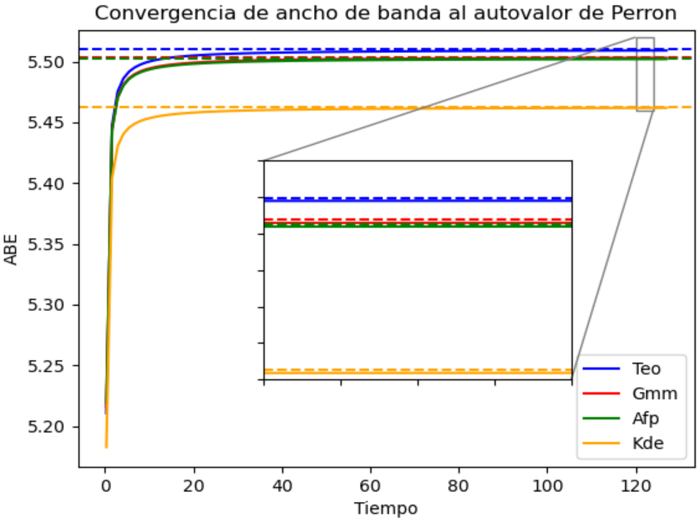
Para demostrar el teorema:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \alpha(s,t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{st} \log\left\{\pi \exp\left[(Q+sH)\, t\right] \mathbf{1}\right\} = \\
&= \frac{1}{s} \log(\rho(\exp(Q+sH))) \\
&= \frac{1}{s} \rho(Q+sH)
\end{aligned}$$

Convergencia

- ¿Qué pasa cuando reemplazamos, Q, H y π por sus estimadores $\hat{Q}$, $\hat{H}$ y $\hat{\pi}$?
- En este trabajo estimamos los parámetros de un FGM usando tres métodos, Kernel Density Estimation (Kde), Gaussian Mixed Model (Gmm) y Affinity Propagation (Afp)

C. Fernández, J. Bavio and B. Marrón, "Evaluation of Clustering Techniques to Estimate the Effective Bandwidth of a Markovian Fluid from Traffic Traces", in IEEE Latin America Transactions, vol. 21, no. 5, pp. 636-642, May 2023, doi: 10.1109/TLA.2023.10130835.


Convergencia de ancho de banda al autovalor de Perron
ABE
5.50
5.45
5.40
5.35
5.30
5.25
5.20
0
20
40
60
80
100
120
Tiempo
Teo
Gmm
Afp
Kde

- Estos son los parámetros estimados con Afinity Propagation

$\hat{\pi}$	0.109	0.107	0.110	0.115	0.110	0.113	0.111	0.114	0.110
π	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111

$$Q = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} -8{,}39 & 0{,}94 & 1{,}04 & 1{,}17 & 0{,}99 & 1{,}15 & 0{,}93 & 1{,}05 & 1{,}11 \\ 0{,}94 & -7{,}92 & 0{,}83 & 1{,}00 & 0{,}96 & 1{,}05 & 1{,}08 & 1{,}12 & 0{,}95 \\ 0{,}99 & 0{,}87 & -7{,}82 & 1{,}01 & 1{,}15 & 0{,}85 & 0{,}98 & 0{,}92 & 1{,}05 \\ 1{,}00 & 1{,}05 & 1{,}10 & -8{,}38 & 1{,}01 & 1{,}09 & 0{,}99 & 1{,}02 & 1{,}12 \\ 0{,}99 & 0{,}88 & 1{,}01 & 1{,}05 & -7{,}81 & 1{,}02 & 1{,}04 & 0{,}98 & 0{,}82 \\ 1{,}09 & 1{,}06 & 1{,}08 & 1{,}09 & 0{,}94 & -8{,}23 & 0{,}99 & 1{,}05 & 0{,}92 \\ 0{,}94 & 0{,}99 & 0{,}93 & 0{,}98 & 1{,}01 & 1{,}05 & -7{,}91 & 1{,}04 & 0{,}97 \\ 0{,}95 & 1{,}01 & 1{,}02 & 1{,}08 & 1{,}03 & 1{,}03 & 1{,}12 & -8{,}27 & 1{,}03 \\ 1{,}04 & 0{,}99 & 1{,}05 & 0{,}97 & 0{,}97 & 0{,}99 & 1{,}00 & 1{,}14 & -8{,}16 \end{bmatrix}$$

$\hat{h}$	512.85	1540.73	2556.34	3583.00	4612.45	5635.21	6654.24	7686.07	9234.71
h	512.0	1536.0	2560.0	3584.0	4608.0	5632.0	6656.0	7680.0	9216.0

Desafíos, Conclusiones y Trabajos Futuros

- Desafíos de este trabajo
  - Dificultad numérica por la exponencial involucrada, reescalamiento de unidades. El cálculo numérico de la exponencial se va del rango de float32. Aun así, error global menor a 10^{-2}.
- Conclusiones
  - El autovalor de Perron de las matrices estimadas, es una buena aproximación para el ABE teórico.
- Trabajos futuros
  - Datos reales. Verificar que la hipotesis de modelado es correcta. 600000 paquetes por segundo, filtrado por Ip, puerto y MAC address.

Desafíos, Conclusiones y Trabajos Futuros

- Desafíos de este trabajo
  - Dificultad numérica por la exponencial involucrada, reescalamiento de unidades. El cálculo numérico de la exponencial se va del rango de float32. Aun así, error global menor a 10^{-2}.
- Conclusiones
  - El autovalor de Perron de las matrices estimadas, es una buena aproximación para el ABE teórico.
- Trabajos futuros
  - Datos reales. Verificar que la hipotesis de modelado es correcta. 600000 paquetes por segundo, filtrado por Ip, puerto y MAC address.

Desafíos, Conclusiones y Trabajos Futuros

- Desafíos de este trabajo
  - Dificultad numérica por la exponencial involucrada, reescalamiento de unidades. El cálculo numérico de la exponencial se va del rango de float32. Aun así, error global menor a 10^{-2}.
- Conclusiones
  - El autovalor de Perron de las matrices estimadas, es una buena aproximación para el ABE teórico.
- Trabajos futuros
  - Datos reales. Verificar que la hipotesis de modelado es correcta. 600000 paquetes por segundo, filtrado por Ip, puerto y MAC address.

Gracias!!